Glava 1

Vektorski prostori

1.1 Definicija vektorskog prostora. Primjeri. Osnovna svojstva

U ovoj sekciji ćemo uvesti osnovni pojam Linearne algebre - vektorski prostor.

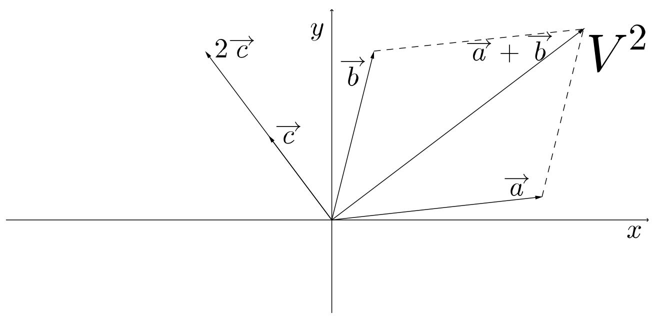
Definicija 1.1. *Skup V naziva se vektorskim prostorom nad poljem $\mathbb{P}$ ako su na njemu definisane dvije operacije:*
(I) *operacija $+$ sabiranja dva elementa iz skupa V, tj. $\forall x, y \in V, x + y \in V$,*
(II) *operacija $\cdot$ množenja elemenata iz skupa V elementima iz polja $\mathbb{P}$, tj. $\forall x \in V$ i $\forall \alpha \in P$ $\alpha \cdot x \in V$,*
i pri tome su zadovoljene sljedeće aksiome:
1. $(\forall x, y, z \in V)$ važi $x + (y + z) = (x + y) + z$;
2. $(\forall x, y \in V)$ važi $x + y = y + x$;
3. $(\exists \mathbb{0} \in V)$, takav da $\forall x \in V$ važi $x + \mathbb{0} = x$;
4. $(\forall x \in V)$ $\exists(-x) \in V$ takav da važi $x + (-x) = \mathbb{0}$;
5. $(\forall x, y \in V), \quad (\forall \alpha \in \mathbb{P})$ važi $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
6. $\forall x \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$ važi $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
7. $(\forall x \in V), \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P})$ važi $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$;
8. $(\forall x \in V) \quad 1 \cdot x = x$, gdje je 1 neutralni element za množenje u polju $\mathbb{P}$.

Elemente vektorskog prostora V nazivamo vektorima.
Elemente polja P nazivamo skalarima.
Element vektorskog prostora $\mathbb{0}$ nazivamo nula vektorom, za njega koristimo drugačiju oznaku od skalara (broja) 0, kako bismo bili precizniji, a formule jasnije.

Primjedbe.
1. Naglasimo da prethodna definicija podrazumijeva postojanje dvije operacije: sabiranje dva vektora i množenje vektora skalarom (brojem). Nikakve druge operacije (za sada) ne poznajemo, na primjer, ne možemo pomnožiti dva elementa vektorskog prostora V.
2. Moguće je razmatrati vektorske prostore nad bilo kojim poljem $\mathbb{P}$. Ipak, u Linearnoj algebri se obično razmatraju vektorski prostori nad poljima realnih brojeva $\mathbb{R}$ i kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Mi ćemo se tokom čitavog kursa ograničiti samo na ta dva polja. Štaviše, u početku ćemo

razmatrati samo vektorske prostore nad poljem realnih brojeva, i tek kasnije preći i na prostore nad poljem $\mathbb{C}$. Dakle, u početku možemo smatrati da su skalari realni brojevi.

Primjer 1. Razmotrimo skup V^2- geometrijsku ravan čiji elementi su zašiljene duži. Uvedimo operaciju sabiranja dva geometrijska vektora (zašiljene duži) na način koji nam je poznat (Slika 1.1): pravilom paralelograma (nadodavanjem jedne duži na drugu). Dalje, uvedimo operaciju množenja geometrijskih vektora realnim brojevima na poznat način: množenje brojem ne mijenja pravac vektora, ali mijenja dužinu i, u slučaju negativnog broja, smjer. Provjeravajući aksiome, utvrdjujemo da nakon uvodjenja ove dvije operacije skup V^2 postaje vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.



Slika 1.1: Sabiranje dva vektora i množenje vektora brojem u geometrijskoj ravni V^2

Primjer 2. Sa $C[0,1]$ označimo skup neprekidnih funkcija na $[0,1]$. Uvedimo standardnu operaciju sabiranja dvije funkcije. Poznato je da je zbir dvije neprekidne funkcije neprekidna funkcija, dakle takodje element $C[0,1]$. Takođe množenjem neprekidne funkcije realnim brojem α dobijamo novu neprekidnu funkciju. Na ovaj način skup $C[0,1]$ postaje vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Primjer 3. Razmotrimo skup $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$.

Dakle, ovaj skup sadrži kolone od n realnih brojeva.

Na ovom skupu želimo uvesti operacije sabiranja dva elementa i množenje elementa realnim brojem, tako da dobijemo strukturu vektorskog prostora. Definišimo operacije na sljedeći način:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lako je provjeriti da je skup $\mathbb{R}^n$ sa ovako uvedenim operacijama vektorski prostor.

Osnovna svojstva.

1. Nula vektor $\mathbb{0}$ je određen jednoznačno (ne postoje dva različita nula vektora u istom prostoru).

Dokaz

Pretpostavimo da u prostoru V postoje dva nula vektora, označimo ih sa $\mathbb{0}$ i $\mathbb{0}'$.

Tada za svaki vektor $x \in V$ imamo da $x + \mathbb{0} = x + \mathbb{0}'$.
Saglasno aksiomi 4 iz definicije vektorskog prostora, postoji $(-x) \in V$. Sabirajući lijevu i desnu stranu gornje jednačine sa ovim vektorom, imamo da $\mathbb{0} = \mathbb{0}'$.
2. Za svaki $x \in V$ njegov inverzni vektor $(-x)$ je jednoznačno određen.
3. Za svaki $x \in V$ imamo: $0 \cdot x = \mathbb{0}$.
Dokaz
Uzmimo proizvoljno $\alpha \in \mathbb{P}$.
Imamo $\alpha \cdot x = (\alpha + 0) \cdot x = \alpha \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 \cdot x = \mathbb{0}$.
4. Za $\forall x \in V$ imamo $(-x) = (-1) \cdot x$.
Dokaz
$\mathbb{0} = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x \Rightarrow -1 \cdot x = (-1) \cdot x \Rightarrow -x = (-1) \cdot x$.
5. Za $\forall \alpha \in P$ imamo $\alpha \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$.
Dokaz
$\alpha \cdot \mathbb{0} = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot x = \mathbb{0}$.
6. Iz jednakosti $\alpha \cdot x = \mathbb{0}$ slijedi da je $\alpha = 0$ ili $x = \mathbb{0}$.
Dokaz
Neka je $\alpha \neq 0$. Tada $\exists \alpha^{-1}$. Pomnožimo jednakost $\alpha \cdot x = \mathbb{0}$ sa α^{-1}, imamo $\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$.
S druge strane, $\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot x = 1 \cdot x = x$.
Iz posljednje dvije jednakosti zaključujemo da $x = \mathbb{0}$.

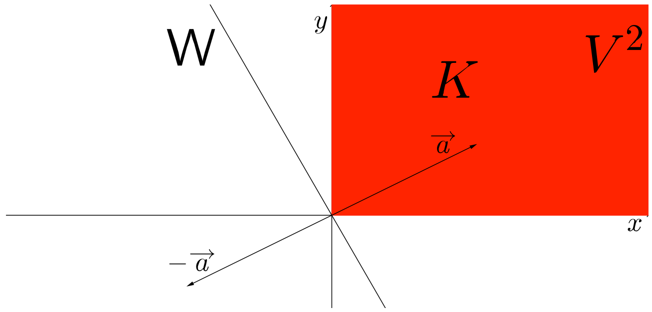
1.2 Vektorski potprostori

Kao i ranije, sa V označavamo vektroski prostor nad poljem P.

Definicija 1.2. *Podskup $W \subseteq V$ naziva se potprostorom prostora V, ako je W vektorski prostor.*

Teorema 1.1. *Podskup $W \subseteq V$ je potprostor ako i samo ako*
1. $(\forall x, y \in W) \quad x + y \in W$;
2. $(\forall x \in W), (\forall \alpha \in \mathbb{P}) \quad \alpha \cdot x \in W$.

Ova teorema se lako dokazuje direktnom provjerom svih aksioma vektorskog prostora.
Razmotrimo neke primjere vektorskih potprostora. Najprije primijetimo da svaki prostor V ima dva trivijalna potprostora, to su čitav prostor V i prostor koji se sastoji samo od nula vektora $\{\mathbb{0}\}$. Vratimo se primjerima vektorskih prostora iz prethodne sekcije kako bismo proučili njihove potprostore.
Primjer 1. Razmotrimo neke podskupove vektorskog prostora V^2 geometrijskih vektora: 1. Prvi kvadrant K nije vektorski potprostor, jer, na primjer množenje vektora negativnim brojem daje vektor izvan skupa K (Slika 1.2). 2. x i y-ose su vektorski potprostori. Dalje, vidimo da su sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak takođe potprostori. To su, uz dva trivijalna potprostora $\mathbb{0}$ i V^2, jedini vektorski potprostori u V^2.
Primjer 2. Razmotrimo neke potprostore prostora $C[0, 1]$ neprekidnih funkcija na segmentu $[0, 1]$:
1. Lako je provjeriti da sve funkcije konstante na $[0, 1]$ čine potprostor.



Slika 1.2: Prvi kvadrant K nije vektorski potprostor V^2, jer postoji vektor koji je element K, ali čiji suprotni vektor nije element K. Sa druge strane, prava W jeste potprostor, kao i sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak.

2. Podskup M_n svih polinoma stepena manjeg ili jednakog n je takođe potprostor prostora $C[0,1]$.

Primjer 3. 1. Na prostoru $\mathbb{R}^n$ razmotrimo skup zadat sa

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Provjerite da li je S vektorski potprostor u $\mathbb{R}^n$.

2. Razmotrimo skup $M \subseteq \mathbb{R}^n$ zadat sa:

$$M = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} | x_1 = x_2 = 4x_n \right\}.$$

Provjerite da li je M vektorski potprostor u $\mathbb{R}^n$.

3. Na prostoru $\mathbb{R}^n$ razmotrimo skup zadat sa

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Provjeriti da li je skup B potprostor.

Svojstva.

1. Ako su W_1 i W_2 potprostori V tada je i njihov presjek $W_1 \cap W_2$ potprostor.
2. Ako su W_1 i W_2 potprostori tada je i njihova suma potprostor, tj. $W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$ je potprostor.

3. Primijetimo da unija dva potprostora nije potprostor, primjerom mogu služiti x i y ose u V^2.

1.3 Linearni omotač skupa

Definicija 1.3. *Neka je dat skup vektora* $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \in V$ *i neka su* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *proizvoljni skalari iz polja* P

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \in V \tag{1.1}$$

Izraz (1.1) *naziva se linearnom kombinacijom vektora* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Definicija 1.4. *Neka je* S *podskup vektorskog prostora* V. *Linearnim omotačem skupa* S *naziva se skup svih mogućih linearnih kombinacija vektora* $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \in S$, *tj.:*

$$\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n | \quad gdje \quad \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in P, \, n - \textit{konačan cijeli broj}\}.$$

Oznaka: Linearni omotač skupa S označavamo sa $\mathcal{L}(S)$, $Lin(S)$ ili $span(S)$.
Ako je $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ konačan skup vektora, tada ćemo njihov linearni omotač označavati sa $\mathcal{L}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Lin\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ili $span\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Primjer 1. Posmatrajmo vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ i dva vektora tog prostora, $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Linearna kombinacija ovih vektora zadata je sa:

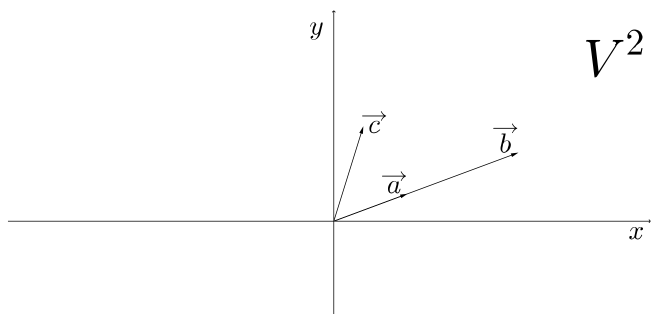
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ -3\alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Linearni omotač skupa $\{x_1, x_2\}$ je $Lin\{x_1, x_2\} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ x^3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Na primjer, vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ pripada linearnom omotaču vektora x_1 i x_2, za konkretne vrijednosti $\alpha_1 = -1$ i $\alpha_2 = 0$.

S druge strane, vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ne pripada linearnom omotaču skupa $\{x_1, x_2\}$ (ne može se predstaviti kao linearna kombinacija ova dva vektora).

Primjer 2. Razmotrimo skup $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ u vektorskom prostoru V^2 (vidi Sliku 1.3). Vidimo da vektor $\vec{b}$ pripada linearnom omotaču skupa $\{\vec{a}\}$, a samim tim i linearnom omotaču skupa $\{\vec{a}, \vec{c}\}$. Takođe, vektor $\vec{a}$ pripada linearnom omotaču skupa $\{\vec{b}\}$, a samim tim i linearnom omotaču skupa $\{\vec{b}, \vec{c}\}$. Ali, vektor $\vec{c}$ ne pripada linearnom omotaču skupa $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.



Slika 1.3

Tvrđenje 1.1. *Linearni omotač skupa je vektorski potprostor u V.*

Dokaz:
Iz Teoreme 1.1 znamo da je dovoljno provjeriti dva svojstva.
Razmotrimo konačan skup $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Neka su $y', y'' \in Lin\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Tada $y' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' x_i$ i $y'' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'' x_i$. Tada je $y' + y'' = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i' + \alpha_i'') x_i$, što znači da je $y' + y'' \in Lin\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
Neka je $y' \in Lin\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, tj. $y' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Neka je β element iz polja, tada je $\beta y' = \sum_{i=1}^{n} \beta\alpha_i x_i$, što predstavlja linearnu kombinaciju vektora $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ sa koeficijentima $\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, .., \beta\alpha_n$, tj. $\beta y' \in Lin\{x_1, x_2, .., x_n\}$.
Zaključujemo da je $Lin\{x_1, x_2, .., x_n\}$ vektorski potprostor.

Tvrđenje 1.2. *Ako $S \subseteq W$, gdje je W potprostor V, tada je $Lin(S) \subseteq W$.*

Dokaz:
Neka je $y \in Lin(S)$, tada $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, gdje su $\{x_1, \ldots, x_n\} \in S \Rightarrow \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq W$. Pošto je W potprostor, to i linearna kombinacija vektora $\{x_1, \ldots, x_n\}$ takođe leži u W, dakle $y \in W$. Dokazali smo da za proizvoljan vektor $y \in Lin(S)$ važi $y \in W$. Odavde slijedi $Lin(S) \subseteq W$.
Zaključak. Iz prethodnog možemo izvesti jednostavan zaključak da je linearni omotač skupa najmanji vektorski potprostor koji sadrži taj skup.

1.4 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

U ovoj sekciji ćemo uvesti ključne pojmove linearne zavisnosti i nezavisnosti vektora.
Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektori u vektorskom prostoru V. Razmotrimo linearnu kombinaciju $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ sistema vektora $\{x_1, \ldots, x_n\} \in V$. Govorićemo da je ova linearna kombinacija *trivijalna*, ako $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ i *netrivijalna*, ako $\exists i = \overline{1, n}$, tako da $\alpha_i \neq 0$.

Definicija 1.5. *Sistem vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se naziva linearno nezavisnim ako iz jednakosti:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathbb{0}$$

slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

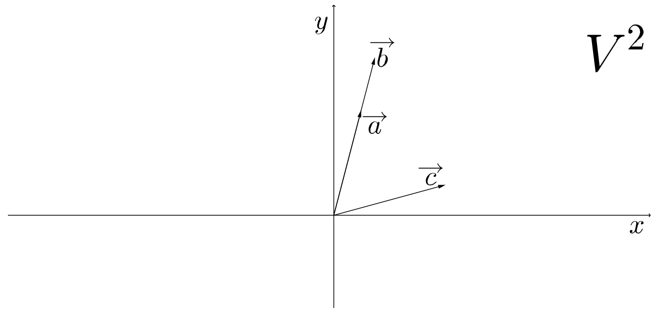
Definicija 1.6. *Sistem vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se naziva linearno zavisnim, ako postoje koeficijenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in P$, pri čemu $\exists \alpha_i \neq 0, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}$, tako da*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathbb{0}.$$

Drugim riječima, sistem vektora se naziva linearno zavisnim, ako postoji njihova netrivijalna linearna kombinacija koja daje nula vektor.

Primjeri.
1. Sistem od dva vektora u geometrijskoj ravni V^2 je linearno zavisan ako i samo ako su oni kolinearni.
Sistem od tri vektora u V^2 je uvijek linearno zavisan.
2. U trodimenzionalnom geometrijskom prostoru V^3 tri vektora su linearno zavisni ako i samo ako su komplanarni (leže u istoj ravni).
Sistem od četiri vektora u V^3 je uvijek linearno zavisan.
Dakle, pojam linearne zavisnosti u geometrijskoj ravni ili prostoru ima jasnu geometrijsku interpretaciju.
Na Slici 1.4 vidimo da je sistem vektora $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ linearno zavisan, dok je sistem $\{\vec{a}, \vec{c}\}$ linearno nezavisan.
Primjer. U $\mathbb{R}^3$ posmatramo sistem od dva vektora:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Slika 1.4

Da bismo provjerili linearnu nezavisnost ovog sistema, izjednačićemo njihovu linearnu kombinaciju sa nulom:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Izjednačavajući koordinate dobijamo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Odavde je lako zaključiti da $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ i, saglasno definiciji, sistem $\{x_1, x_2\}$ je linearno nezavisan.
Sada razmotrimo sistem $\{x_1, x_2, x_3\}$, gdje je:

$$x_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Da bismo ispitali linearnu zavisnost ovih vektora, posmatramo njihovu linearnu kombinaciju:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \mathbb{0}.$$

Dobijamo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Ovaj sistem ima beskonačno mnogo rješenja, a jedno od mogućih je $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3, -1, 1)$. Zaključujemo da postoji netrivijalna linearna kombinacija vektora x_1, x_2, x_3 koja rezultira nula vektorom. Saglasno definiciji, ovaj sistem vektora je linearno zavisan.
Vidjeli smo da provjera linearne zavisnosti i nezavisnosti u prostoru $\mathbb{R}^n$ dovodi do neophodnosti rješavanja sistema linearnih jednačina. U trećem poglavlju ćemo detaljno proučiti teoriju i metode rješavanja sistema linearnih jednačina.
Sada ćemo dokazati nekoliko teorema o linearnoj zavisnosti i nezavisnosti vektora.

Teorema 1.2. *Sistem vektora* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *je linearno zavisan ako i samo ako se jedan vektor može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih.*

Dokaz
Neka su vektori $x_1, x_2, \dots, x_n$ linearno zavisni, tada $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathbb{0}$ i uz to postoji bar jedno $\alpha_i \neq 0$. Tada je:

$$\alpha_i x_i = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \cdots - \alpha_{i-1} x_{i-1} - \alpha_{i+1} x_{i+1} - \cdots - \alpha_n x_n.$$

Ako podijelimo jednačinu sa $\alpha_i \neq 0$ dobijamo:

$$x_i = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_i})x_1 + (-\frac{\alpha_2}{\alpha_i})x_2 + \cdots + (-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i})x_{i-1} + (-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i})x_{i+1} + \cdots + (-\frac{\alpha_n}{\alpha_i})x_n.$$

Dakle, x_i je linearna kombinacija ostalih vektora.
Sada dokažimo tvrđenje i u drugom smjeru. Ne umanjujući opštost, uzmimo da se vektor x_n može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih, tj:

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - x_n = \mathbb{0}. \tag{1.2}$$

U (1.2) koeficijent uz x_n je $-1 \neq 0$, samim tim radi se o netrivijalnoj linearnoj kombinaciji, što znači da je skup vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ linearno zavisan.

Teorema 1.3. *Sistem vektora* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *iz* V *je linearno zavisan ako i samo ako u* V *postoji vektor koji može biti predstavljen kao linearna kombinacija vektora* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *na bar dva različita načina.*

Dokaz
Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ linearno zavisni. Tada $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathbb{0}$, pri čemi $\exists \alpha_i \neq 0$. S druge strane, imamo i drugo razlaganje nula vektora $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = \mathbb{0}$. Dakle, napisali smo nula vektor kao linearnu kombinaciju vektora $x_1, \dots, x_n$ na dva različita načina.
Dokažimo tvrđenje i u drugom smjeru. Neka je $y \in V$ vektor koji ima dva razlaganja, tj:

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,\ y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n,$$

pri čemu $\exists i : \alpha_i \neq \beta_i$. Oduzmimo drugu jednačinu od prve:

$$\mathbb{0} = (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)x_n.$$

Pošto je bar jedna od razlika $\alpha_i - \beta_i \neq 0$, ovo je netrivijalna linearna kombinacija, pa su prema definiciji vektori $x_1, x_2, \dots, x_n$ linearno zavisni.

Teorema 1.4. *Neka je* $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ *linearno zavisan sistem vektora i neka su* $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ *prozivoljni vektori u* V. *Tada je sistem vektora* $\{x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n\}$ *linearno zavisan.*

Dokaz
Kako su vektori $x_1, x_2, \dots, x_p$ linearno zavisni, tada $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p = \mathbb{0}$, pri čemu postoji bar jedno $\alpha_i \neq 0$. Tada je

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p + 0 \cdot x_{p+1} + 0 \cdot x_{p+2} + \cdots + 0 \cdot x_n = \mathbb{0}$$

netrivijalna linearna kombinacija jer $\exists i \in \{1, 2, \dots, p\}$, takvo da $\alpha_i \neq 0$. Slijedi da je sistem vektora $x_1, \dots, x_n$ linearno zavisan.

Posljedica 1.1. *Neka je sistem vektora* $S = \{x_1, \dots, x_p\}$ *linearno nezavisan i neka je* $Q \subseteq S$. *Tada je skup* Q *takođe linearno nezavisan.*

Dokaz ove posljedice je jednostavan, pa ga ostavljamo za vježbu.

Teorema 1.5. *Neka je* S *linearno nezavisan skup vektora iz* V, $u \in V$ *i* $u \notin S$. *Tada je* $S \cup \{u\}$ *linearno zavisan ako i samo ako* $u \in Lin(S)$.

Dokaz

Neka je $S = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ skup linearno nezavisnih vektora i $S \cup \{u\}$ linearno zavisan. Tada:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1} u = \mathbb{0} \tag{1.3}$$

pri čemu $\exists i \in \{1, 2, \dots, p+1\}$, takav da $\alpha_i \neq 0$.
Ako pretpostavimo da je $\alpha_{p+1} = 0$ tada $\exists i \in \{1, 2, \dots, p\}$ tako da $\alpha_i \neq 0$, dakle linearna kombinacija $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = \mathbb{0}$ je netrivijalna. To znači da je skup vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ linearno zavisan, što je kontradikcija sa pretpostavkom Teoreme. Zaključujemo da je $\alpha_{p+1} \neq 0$.
Tada iz (1.3) imamo:

$$u = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_{p+1}})x_1 + \cdots + (-\frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}})x_p,$$

što znači da je $u \in Lin\{x_1, x_2, \dots, x_p\} = Lin(S)$.
Neka je sada $u \in Lin(S)$. Tada je $u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p - u = \mathbb{0}$. Jasno je da su vektori $\{x_1, x_2, \dots, x_p, u\}$ linerano zavisni jer je koeficijent uz u u navedenoj linearnoj kombinaciji $-1 \neq 0$. Dakle, $S \cup \{u\}$ je linearno zavisan sistem vektora.
Primjena. (preuzeto iz Insel i ostali: *Linear algebra. Fourth edition.*)
U članku B. K. Watt i A. L. Merrill, objavljenom u *Agriculture Hand-book, N. 8, Washington, D.C., 1963.* data je sljedeća tabela sadržaja pet osnovnih vitamina (vitamina A, B_1, B_2, C i niacina) u nekim prehrambenim namirnicama:

namirnica	A	B_1	B_2	niacin	C
Jabukov maslac	0	0.01	0.02	0.2	2
svježe jabuke	90	0.03	0.02	0.1	4
čoko slatkiš sa kokosom	0	0.02	0.07	0.2	0
meso iz školjki	100	0.1	0.18	1.3	10
kolač od vafli	0	0.05	0.06	0.3	0
kaša sa žitaricama	0	0.01	0.01	0.1	0
marmelada	10	0.01	0.03	0.2	2
pita od kokosa sa prelivom	0	0.02	0.02	0.4	0
sirovi crni pirinač	0	0.34	0.05	4.7	0
soja sos	0	0.2	0.25	0.4	0
kuvane špagete	0	0.01	0.01	0.3	0
sirovi divlji pirinač	0	0.81	0.63	6.2	0

U tabeli su ukazane količine vitamina koje se nalaze u 100 grama svake od namirnica.
Sada sadržaj vitamina u 100 grama namirnice možemo posmatrati kao vektor u $\mathbb{R}^5$. Tada, na primjer, možemo uočiti da se vektor sirovog divljeg pirinča može predstaviti kao linearna

kombinacija vektora kolača od vafli, pite od kokosa, sirovog crnog pirinča i soja sosa:

$$\begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.05 \\ 0.06 \\ 0.30 \\ 0.00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.02 \\ 0.02 \\ 0.40 \\ 0.00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.34 \\ 0.05 \\ 4.70 \\ 0.00 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.20 \\ 0.25 \\ 0.40 \\ 0.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.81 \\ 0.63 \\ 6.20 \\ 0.00 \end{pmatrix}.$$

Ovo nas dovodi do zaključka da 100 grama kolača od vafli, 100 grama kokosove pite sa prelivom, 100 grama sirovog crnog pirinča i 200 grama soja sosa zajedno sadrže istu količinu pet osnovnih vitamina kao 100 grama sirovog divljeg pirinča.
Za vježbu pokažite da je vektor mesa iz školjki linearna kombinacija jabukovog maslaca, svježih jabuka, čokoladnog slatkiša sa kokosom, kaše, marmelade i kuvanih špageta.

1.5 Baza i dimenzija vektorskog prostora

Definicija 1.7. *Govorićemo da sistem vektora* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *generiše vektorski prostor* V *ako je* $Lin\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = V$.

Definicija 1.8. *Sistem vektora* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *se naziva bazom vektorskog prostora* V*, ako je:*
1. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *sistem linearno nezavisnih vektora;*
2. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *generiše prostor* V.

Teorema 1.6. *Neka je* V *vektorski prostor i* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$. S *je baza u* V *ako i samo ako se svaki vektor* $u \in V$ *može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz* S *na jedinstven način.*

Dokaz
Neka je S baza. Tada $Lin(S) = V$. Ovo znači da se svaki vektor $u \in V$ može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz S:

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n. \tag{1.4}$$

Pretpostavimo da se u može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz S na još jedan način, tj:

$$u = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n, \tag{1.5}$$

pri čemu $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tako da je $\alpha_i \neq \beta_i$. Oduzmimo (1.5) od (1.4):

$$\mathbb{0} = (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \cdots + (\alpha_i - \beta_i)x_i + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)x_n.$$

Kako je $\alpha_i \neq \beta_i$ to je $\alpha_i - \beta_i \neq 0$, što znači da je sistem vektora $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ linearno zavisan, tj. S nije baza u V.
Dokažimo tvrđenje i u drugom smjeru. Neka se svaki vektor $u \in V$ može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz $S = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ovo znači da $Lin\{x_1, \dots, x_n\} = V$, tj. $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ generiše prostor V. Vektor $\mathbb{0} \in V$, pa se on može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz S: $\mathbb{0} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ za jedinstvene $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Očigledno $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, a to znači da su vektori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ linearno nezavisni. Zaključujemo da je $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ baza u V.

Definicija 1.9. *Neka je* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *baza u* V, $u \in V$. *Linearna kombinacija*

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

se naziva razlaganjem vektora u *po bazi* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *se nazivaju koordinatama vektora* u *u bazi* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Sada možemo preformulisati Teoremu 1.6 na sljedeći način:
Razlaganje vektora po bazi je jedinstveno.

Teorema 1.7. *Neka je* V *generisan nekim konačnim skupom vektora* $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. *Tada* $\exists Q \subseteq S$ *takav da je* Q *baza u* V. *Znači,* V *ima konačnu bazu.*

Dokaz
Iz skupa $S = \{x_1, \ldots, x_p\}$ izdvojimo maksimalan podskup linearno nezavisnih vektora, tj. podskup $Q = \{x_1, \ldots, x_m\}, m \leq p$, takav da je Q linearno nezavisan i za bilo koji vektor $u \in S$, skup $Q \cup \{u\}$ je linearno zavisan. Nije teško zaključiti da ovakav podskup Q postoji.
Zbog jednostavnosti oznaka pretpostavimo da skup Q sadrži prvih m vektora skupa S i predstavimo S kao $S = \{x_1, \ldots, x_m\} \cup \{x_{m+1}, \ldots, x_p\}$. Po pretpostavci $x_{m+1} \in Lin\{x_1, \ldots, x_m\}, \ldots, x_p \in Lin\{x_1, \ldots, x_m\}$, što znači da:

$$x_i = \alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 + \cdots + \alpha_m^i x_m, \text{ za } \forall i \in \{m+1, m+2, \ldots, p\}. \tag{1.6}$$

Neka je $u \in V$ proizvoljan vektor. Kako S generiše čitav prostor V, to se u može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz S:

$$u = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \beta_{m+1} x_{m+1} + \cdots + \beta_p x_p.$$

U posljednju jednakost uvrstimo (1.6), dobijamo:

$$u = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \beta_{m+1}\alpha_1^{m+1} x_1 + \cdots + \beta_{m+1}\alpha_m^{m+1} x_m + \cdots + \beta_p \alpha_1^p x_1 + \cdots + \beta_p \alpha_m^p x_m,$$

tj.:

$$u = (\beta_1 + \beta_{m+1}\alpha_1^{m+1} + \cdots + \beta_p \alpha_1^p) x_1 + \cdots + (\beta_m + \beta_{m+1}\alpha_m^{m+1} + \cdots + \beta_p \alpha_m^p) x_m.$$

Ako uvedemo oznake $\gamma_1 = \beta_1 + \beta_{m+1}\alpha_1^{m+1} + \cdots + \beta_p \alpha_1^p, \ldots, \gamma_m = \beta_m + \beta_{m+1}\alpha_m^{m+1} + \cdots + \beta_p \alpha_m^p$, imamo:

$$u = \gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_m x_m \Rightarrow u \in Lin\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = Lin(Q).$$

Kako je vektor u bio izabran proizvoljno, ovo znači da je $Lin(Q) = V$.
Dakle, sistem vektora Q je linearno nezavisan i $Lin(Q) = V$. Po definiciji Q je baza u V.

Teorema 1.8. *Neka je* V *vektorski prostor koji je generisan skupom* K *od* n *vektora i neka je* $L \subseteq V$ *skup od* m *linearno nezavisnih vektora. Tada je* $m \leq n$ *i* $\exists H \subseteq K$ *koji sadrži* $n - m$ *vektora, tako da* $L \cup H$ *generiše* V.

Dokaz
Dokaz ćemo izvesti indukcijom po m.
1. Baza indukcije: Neka je $m = 0$. Tada je L prazan skup, $L = \oslash \Rightarrow H = K$, pa je jasno da $L \cup H$ generiše čitav prostor V.
2. Korak indukcije: Pretpostavimo da teorema važi za neko $m \geq 0$. Treba je dokazati za $m+1$ vektora u L.
Neka je $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\} \subseteq V$ skup od $m+1$ linearno nezavisnih vektora. Tada je po Posljedici 1.1 skup $\{v_1, \ldots v_m\}$ takođe linearno nezavisan. Po induktivnoj pretpostavci $m \leq n$ i postoji podskup skupa K od $n - m$ vektora $\{u_1, \ldots, u_{n-m}\}$, tako da $\{v_1, \ldots, v_m\} \cup \{u_1, \ldots, u_{n-m}\}$ generiše prostor V. Izrazimo vektor v_{m+1} kao linearnu kombinaciju vektora $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_{n-m}\}$:

$$v_{m+1} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{n-m} u_{n-m}. \tag{1.7}$$

Primijetimo da je $n - m > 0$. Zaista, kada bi $n = m$, imali bismo:

$$v_{m+1} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m,$$

a to bi značilo da je skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\}$ linearno zavisan, što je kontradikcija sa pretpostvakom da je skup L linearno nezavisan. Dakle, $m < n$. Na isti način zaključujemo da postoji $\beta_i \neq 0$. Zbog jednostavnosti oznaka pretpostavimo da je to β_1. Podijelimo jednakost (1.7) sa β_1:

$$u_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\beta_1} v_m - \frac{\beta_2}{\beta_1} u_2 - \cdots - \frac{\beta_{n-m}}{\beta_1} u_{n-m} + \frac{1}{\beta_1} v_{m+1}.$$

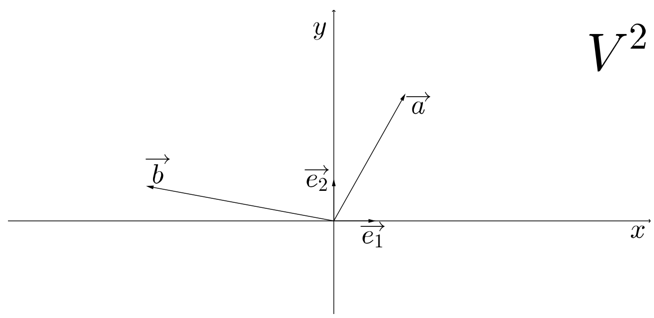
Označimo $H = \{u_2, u_3, \ldots, u_{n-m}\}$. Iz gornje jednakosti vidimo da $u_1 \in Lin(L \cup H)$ i znači $\{v_1, v_2, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\} \subseteq Lin(L \cup H)$. Pošto ovaj sistem generiše V, to znači da i $L \cup H$ generiše V. Kako H sadrži $n - m - 1$ vektor, to je Teorema tačna i za $m + 1$.
Saglasno principu indukcije, Teorema je dokazana.
Prethodna Teorema je zahtijevala nešto teži dokaz, ali sada zahvaljujući njoj možemo relativno jednostavno izvesti važne zaključke o bazi vektorskog prostora.

Posljedica 1.2. *Neka V ima konačnu bazu od n vektora. Tada svaka baza u V ima n vektora.*

Dokaz
Neka je $Q = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u vektorskom prostoru V i neka je R druga baza u istom prostoru. Znamo da Q generiše prostor V. Na osnovu Teoreme 1.8,imamo da R sadrži $m \leq n$ vektora.
Ako sada u dokazu zamijenimo uloge Q i R na isti način možemo dokazati da $n \leq m$. Zaključujemo da je $m = n$, tj. Q i R sadrže jednak broj vektora.
Upravo dokazana Posljedica nam omogućava da uvedemo još jedan važan pojam Linearne algebre.

Definicija 1.10. *Vektorski prostor V se naziva konačnodimenzionalnim ako ima bazu od konačnog broja vektora. Broj vektora u bazi vektorskog prostora se naziva dimenzijom tog prostora.*

Oznaka: Dimenzija vektorskog prostora V se označava sa $dimV$.
Vektorski prostor koji nema bazu od konačnog broja vektora se naziva *beskonačnodimenzionalnim.*
Primjer 1. Razmotrimo geometrijsku ravan V^2. Vektori $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ su linearno nezavisni. Uz to, svaki vektor se može predstaviti kao linearna kombinacija ova dva vektora, drugim riječima $Lin\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} = V^2$. Zaključujemo da je ovo baza u V^2. Dakle, V^2 je dvodimenzionalan prostor. Svaki vektor u V^2 se može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija ova dva vektora. Koeficijenti razlaganja po ovoj bazi se nazivaju Dekartovim koordinatama vektora.
Naravno, ovo nije jedina baza u V^2. Bilo koji sistem od dva linearno nezavisna vektora je takođe baza u V^2. Na Slici 1.5 vidimo da i sistem vektora $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ i sistem $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ čine baze prostora V^2.



Slika 1.5

Dakle, $dimV^2 = 2$.
Primjer 2. Razmotrimo vektorski prostor

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Lako je provjeriti da sljedeći sistem vektora:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

generiše $\mathbb{R}^n$, uz to su linearno nezavisni. Za ovu bazu u $\mathbb{R}^n$ ponekad kažemo da je standardna baza. Bilo koji drugi sistem od n linearno nezavisnih vektora je takođe baza u $\mathbb{R}^n$. Dakle, prostor $\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionalan, $dim\mathbb{R}^n$.
Primjer 3. Na vektorskom prostoru $C[0,1]$ razmotrimo sistem vektora $\{1, t, t^2, \dots\}$. Ovo su očigledno neprekidne funkcije na $[0,1]$, dakle pripadaju $C[0,1]$. Primijetimo da je ovaj sistem funkcija (vektora u $C[0,1]$) linearno nezavisan, a ima ih beskonačno mnogo. Dakle, na prostoru $C[0,1]$ ne postoji baza od konačnog broja vektora, ovaj prostor je beskonačnodimenzionalan.

Primjer 4. (preuzeto iz Shikin: *Lineinie prostranstva i otobrazheniya*)
Jedna mala oblast nauke, pod nazivom *Kolorimetrija* se bavi "mjerenjem" boja, primjenjujući Linearnu algebru. "Izmjeriti" boju X znači naći način na koji se ta boja može dobiti miješanjem tri osnovne boje. Pri tome se tri osnovne boje mogu izabrati na različite načine. Tipičan izbor je: crvena, zelena, plava (red, green,blue - RGB). Recimo da se boja X dobija miješajući količine α, β, γ crvene, zelene i plave boje respektivno:

$$X = \alpha R + \beta G + \gamma B, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0.$$

U praksi, neke boje se mjere tako što se najprije njima doda izvjesna količina jedne ili dvije od osnovnih boja, a zatim se ta nova boja dobije od preostalih (jedne ili dvije) osnovne boje. Recimo, boji X se najprije dodaje crvena boja, a zatim se ta boja dobija miješanjem zelene i plave. U tom slučaju se boja X mjeri na sljedeći način:

$$X + \alpha R = \beta G + \gamma B, \Rightarrow X = -\alpha R + \beta G + \gamma B, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0.$$

Vidimo da Kolorimetrija na skupu boja faktički uvodi strukturu vektorskog prostora, gdje operacija sabiranja vektora predstavlja miješanje dvije boje, a množenje boje brojem je promjena intenziteta boje. Tri osnovne boje su baza ovog prosora. Pri tome RGB nije jedini mogući izbor za bazu. Recimo, moguće je umjesto zelene boje uzeti žutu i razlagati boje po bazi RYB. Bilo koje tri boje koje su "linearno nezavisne" mogu biti izabrane kao osnovne, tj. kao baza prostora boja. Zaključujemo da je prostor boja trodimenzionalan. S druge strane, sistem YGB ne može biti bazom ovog prostora, jer su te tri boje linearno zavisne.
Primjer 5. Označimo sa M_n, skup polinoma stepena $\leq n$ sa standardnim operacijama sabiranja i množenja polinoma brojem. Lako je provjeriti da M_n sa ovim operacijama ima strukturu vektorskog prostora nad poljem realnih brojeva. Elementi ovog prostora su oblika

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Standardna baza u prostoru M_n je $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$, dakle $dim M_n = n + 1$.
Primjer 6. Vratimo se za momenat na Primjenu iz Sekcije I.4. Sada možemo reći da, proučavajući sadržaj osnovnih vitamina, možemo uvesti 5-dimenzionalni vektorski prostor namirnica. Za vježbu naći dvije različite baze u tom prostoru.
Primjedba. Linearna algebra se bavi proučavanjem konačnodimenzionalnih prostora i linearnih preslikavanja u njima. Pošto smo vidjeli da prostor $C[0, 1]$ nema konačnu bazu, to izučavanje ovog prostora ne spada u predmet Linearne algebre. Zato u daljem izlaganju više nećemo pominjati ovaj prostor.
Nastavimo sa još jednim važnim tvrđenjem koje nam daje ključne odgovore o strukturi vektorskog prostora.

Posljedica 1.3. *Neka je V vektorski prostor dimenzije n. Tada:*
(I) Svaki skup koji generiše V sadrži najmanje n vektora, pri tome skup koji generiše V i sadrži tačno n vektora je baza u V.
(II) Svaki skup linearno nezavisnih vektora koji sadrži n vektora je baza u V.
(III) Svaki skup linearno nezavisnih vektora u V može biti dopunjen do baze u V.

Dokaz
Sa $Q = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ označimo bazu u V.
(I) Neka K generiše V. Po Teoremi 1.7 $\exists H \subseteq K$ koji je baza u V. Po Posljedici 1.2 skup H sadrži tačno n vektora. Kako je $H \subseteq K$, to K sadrži $\geq n$ vektora. Ako K sadrži tačno n vektora tada je $H = K$, tj. K je baza u V.
(II) Neka je L skup koji sadrži n linearno nezavisnih vektora. Po Teoremi 1.8 $\exists H \subseteq Q$ koji sadrži $n - n = 0$ vektora, tako da $L \cup H$ generiše V, tj. L generiše V. Zaključujemo da je L baza u V.
(III) Ako je L skup od m linearno nezavisnih vektora to po Teoremi 1.8 postoji skup $H \subseteq Q$ tako da $L \cup H$ generiše V, odakle slijedi da $L \cup H$ sadrži $m + (n - m) = n$ vektora. Po dokazanom tvrđenju (I) ove Posljedice, $L \cup H$ je baza u V.
Zadatak. Posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^4$ i četiri vektora iz tog prostora:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ispitajmo da li su ovi vektori linearno nezavisni. Sastavimo njihovu linearnu kombinaciju i izjednačimo je sa nula vektorom:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ovo nas dovodi do sistema linearnih jednačina:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_2 + 5\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 7\alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Rješavajući ovaj sistem, dobijamo samo trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Dakle, vektori v_1, v_2, v_3, v_4 su linearno nezavisni. Pošto su to 4 linearno nezavisna vektora u četvorodimenzionalnom prostoru, to znači da su oni baza u $\mathbb{R}^4$.

Teorema 1.9. *Neka je W potprostor u prostoru V. Tada je $dimW \leq dimV$, a ako je $dimW = dimV$ tada je $W = V$.*

Dokaz
Označimo $n = dimV$. Ako je $W = \{\mathbb{0}\}$, tada je $dimW = 0 \leq n$. U suprotnom W sadrži bar jedan vektor $x_1 \neq \mathbb{0}$, koji je sam po sebi linearno nezavisan. Dopunimo x_1 do baze u W, tj. $W = Lin\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Ovaj skup vektora je linearno nezavisan u V, što znači da je $m \leq n$. Imamo da je

$$dimW = m \leq n = dimV.$$

Ako je $dimW = n$, to znači da u W postoji baza od n vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, što znači da je i $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ baza u V. Zaključujemo da je

$$W = V = Lin\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Posljedica 1.4. *Ako je W potprostor u V, tada W sadrži konačnu bazu koja može biti dopunjena do baze u V.*

Dokaz
Dokaz slijedi po Teoremi 1.9 i Posljedici 1.3 (III).

Primjer 7. Posmatrajmo vektorski prostor $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Neka je $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ vektorski potprostor u $\mathbb{R}^3$. Lako vidimo da je $dimW = 2$, dok je $dim\mathbb{R}^3 = 3$.

Jasno je da vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ pripada W, dok $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne pripada. Takođe primijetimo da su vektori:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni, pa čine bazu u W. Takav sistem vektora može se dopuniti do baze u V, s tim što se mora izabrati treći vektor koji je sa navedena dva vektora linearno nezavisan. Taj treći vektor može biti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W$.

1.6 Izomorfizam vektorskih prostora iste dimenzije

Neka su V i V' vektorski prostori nad poljem P.

Definicija 1.11. *Vektorski prostor V' naziva se izomorfnim vektorskom prostoru V ako postoji "$1-1$" preslikavanje $\varphi : V \to V'$ tako da $\forall u, v \in V$ i $\forall \alpha \in P$ važi:*
1. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
2. $\varphi(\alpha u) = \alpha\varphi(u)$.

Preslikavanje φ se naziva izomorfizmom.
Oznaka: $V \cong V'$ čita se: "Prostori V i V' su izomorfni".

Tvrđenje 1.3. $\varphi(\mathbb{0}) = \mathbb{0}'$, *gdje su* $\mathbb{0}$ *i* $\mathbb{0}'$ *nula vektori u prostorima V i V', respektivno.*

Dokaz
Neka je $v \in V$ i neka je $\varphi : V \to V'$ izomorfizam vektorskih prostora V i V'. Tada:

$$\varphi(\mathbb{0}) = \varphi(0 \cdot v) = 0 \cdot \varphi(v) = \mathbb{0}'.$$

Primjedba. Izomorfizam je relacija ekvivalencije.

Teorema 1.10. *Vektorski prostori V i V' su izomorfni ako i samo ako $dimV = dimV'$.*

Dokaz:
Neka je $dimV = dimV' = n$ i neka su $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i $B_2 = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ baze u V i V', respektivno. Izaberimo proizvoljni vektor $v \in V$, tada se v razlaže po bazi u svom prostoru:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Definišimo preslikavanje φ na sljedeći način: $\varphi(v) = v'$, gdje je $v' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i$. Dakle, preslikavanje φ je definisano tako da se svaki vektor iz V slika u vektor sa istim koordinatama u V'. Preslikavanje φ je "$1-1$", jer je razlaganje po bazi jedinstveno.
Neka su dalje $u, v \in V$, tj. $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ i $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$. Tada je:

$$\varphi(u+v) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)e'_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e'_i = u' + v' = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Slično ćemo pokazati da je $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$:

$$\varphi(\alpha v) = \varphi(\alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha\beta_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\beta_i e'_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i e'_i = \alpha v' = \alpha\varphi(v).$$

Dakle, dokazali smo da su prostori iste dimenzije izomorfni, tako što smo konstruisali jedan takav izomorfizam.
Neka je sada $dimV = n > n' = dimV'$. Tada izomorfizam φ slika bazu B_1 u vektore $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$, koji su linearno zavisni jer u V' baza po pretpostavci ima $n' < n$ vektora. To znači da $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tako da je $\alpha_i \neq 0$ i da:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i) = \mathbb{0}'$$

Pošto je φ izomorfizam, imamo da:

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \mathbb{0}'.$$

Kako je φ "$1-1$" preslikavanje, to se samo jedan vektor iz V slika u nula vektor u V', a to je nula vektor iz V. Slijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \mathbb{0},$$

i pošto $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tako da je $\alpha_i \neq 0$, to znači da sistem vektora B_1 nije baza, jer su linearno zavisni. Ovo je kontradikcija koja pokazuje da $n \leq n'$.

Na isti način se pokazuje kontradikcija i za pretpostavku $n < n'$. Ovo dokazuje da prostori različitih dimenzija nisu izomorfni.

Zaključak. Na kraju prvog Poglavlja podsjetimo da smo se upoznali sa konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima, njihovom strukturom i svojstvima. Rezultat o izomorfizmu vektorskih prostora nam omogućava da poistovjetimo dva vektorska prostora iste dimenzije. Uz pomoć izomorfizma, sve rezultate o jednom prostoru možemo lako prenijeti na drugi. To nam otvara mogućnost da dalje skoro isključivo radimo sa prostorima $\mathbb{R}^n$ i skoro zaboravimo na geometrijske prostore, prostore boja, prostore prehrambenih namirnica i slično. Tačke u geometrijskom prostoru, boje, namirnice, itd. možemo poistovjetiti sa koordinatnim kolonama u $\mathbb{R}^n$, gdje je lakše vršiti operacije sabiranja vektora i množenja brojem. Takođe, operacije nad vektorima u $\mathbb{R}^n$ je lako isprogramirati na računaru, i tako (koristeći izomorfizam) kreirati programe za operacije nad geometrijskim vektorima, za mjerenje boja ili sastavljanje optimalnog režima ishrane. Dakle, ubuduće ćemo se baviti isključivo Linearnom algebrom, znajući da se njeni rezultati mogu primijeniti na mnoge oblasti, uključujući Analitičku geometriju, Kompjutersku grafiku, Kolorimetriju ili Dijetologiju.